Zastosowanie algebry kwaternionów

Arkadiusz Mielczarek

24 maja 2014

Definicja

Kwaterniony są rozszerzeniem liczb zespolnych. Zostaly wprowadzone przez irlandzkiego matematyka Williama Hamiltona w 1843 roku i służyły opisowi mechaniki przestrzeni $\mathbb{R}^3$ Algebra kwaterionów to unormowana, czterowymiarowa algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Oznacza się ją przez $\mathbb{H}$ od pierwszej litery nazwiska twórcy. Oznaczmy dowlony kwaterion przez $q \in \mathbb{H}$, podstawowym sposobem zapisu jest $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ gdzie $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ natomiast i, j, k są izomorficzne z bazą standarowa e_1, e_2, e_3 przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Tabela działań

Operację mnożenia na elementach zbioru $\{1, i, j, k\}$ przedstawia poniższa tabela:

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Operacje na kwaterionach

istnieje alternatywny zapis kwaterionu $q = (a, v)$ gdzie $a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3$

dla kwaterionów można równieź zdefiniować między innymi następujące operacje:

- dodawanie $q + t = (a, v) + (b, u) = (a + b, v + u)$
- mnożenie $qt = (a, v)(b, u) = (ab - < v, u >, au + bv + v \times u)$ gdzie $< v, u >$ to iloczyn skalarny, a $v \times u$ - wektorowy
- normę $||q||^2 = a^2 + < v, v > = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- sprzężenie $\overline{q} = \overline{(a, v)} = (a, -v)$
- odwrotność $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{||q||^2}$ - w praktycznych zastosowaniach używa się kwaterionów znormalizowanych $||q|| = 1$ dla których odwrotność i sprzężenie są równe.

Mechanika przestrzeni $\mathbb{R}^3$ - Rotacje

Zdefiniujmy funkcję $R_q(x) = qxq^{-1}$, kwaternion q można również zapisać inaczej: $q = ||q||(\frac{a}{||q||}, \frac{||v||\cdot v}{||q||\cdot||v||})$ ponieważ w naszych rozważaniach ograniczamy się do $||q|| = 1$, zdefiniujmy $\frac{a}{||q||} = \cos(\frac{\theta}{2}), \frac{||v||}{||q||} = \sin(\frac{\theta}{2}), \frac{v}{||v||} = \hat{v}$ otrzymujemy wtedy $q = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\hat{v})$ Okazuję się, że θ oznacza kąt obrotu a $\hat{v}$ oznacza wersor osi wokół której obraca się punkt x w $\mathbb{R}^3$ po nałożeniu na niego funkcji $R_q(x)$ Wprawdzie potrzebujemy wtedy także możliwości zapisu punktu jako kwaterionu. Nic prostszego, współrzędne punktu x stają się poszczególnymi współrzędnymi składowej v kwaternionu.

Przykład 1

Obróćmy punkt $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wokół osi wyznaczonej wersorem

$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ o kąt $\theta = \frac{\pi}{2}$ wtedy

$$q = (\cos(\tfrac{\pi}{4}), \sin(\tfrac{\pi}{4}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}) = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix})$$

$$q^{-1} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix})$$

Przykład 1 c.d

$$R_q(x) = qxq^{-1} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix})(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}) =$$

$$(-\tfrac{1}{2}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix})(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) = (0, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix})$$

Rotacje i Translacje - Kwaterniony Dualne

Kwaterniony dualne DQ zostały zaproponowane przez Williama Kingdom Clifford w 1973. Są one rozszerzeniem kwaternionów hamiltonowskich. Umożliwiają one zapis nie tylko rotacji i punktów w $\mathbb{R}^3$ ale również translacji. Definicja:
$\check{q} = (\check{a}, \check{v}) = (a, v, a_\varepsilon, v_\varepsilon) = q + \varepsilon q_\varepsilon =$
$a + xi + yj + zk + \varepsilon(a_\varepsilon + x_\varepsilon i + y_\varepsilon j + z_\varepsilon k)$ oraz $\varepsilon^2 = 0$

Operacje na kwaternionach dualnych

Następujące operacje na DQ są przydatne do opisu mechaniki w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Zapis używany to $\check{q} = (a, v, a_\varepsilon, v_\varepsilon)$,$\check{t} = (b, u, b_\varepsilon, u_\varepsilon)$ $a, b, a_\varepsilon, b_\varepsilon \in \mathbb{R}, v, u, v_\varepsilon, u_\varepsilon \in \mathbb{R}^3$

- dodawanie $\check{q} + \check{t} = (a + b, v + u, a_\varepsilon + b_\varepsilon, v_\varepsilon + u_\varepsilon)$
- mnożenie $\check{q}\check{t} = qt + \varepsilon(qt_\varepsilon + q_\varepsilon t) = (ab - < v, u >$ $, au + bv + v \times u, ab_\varepsilon + a_\varepsilon b - < v, u_\varepsilon > - < v_\varepsilon, u >$ $, au_\varepsilon + b_\varepsilon v + a_\varepsilon u + bv_\varepsilon + v \times u_\varepsilon + v_\varepsilon \times u)$ gdzie $< v, u >$ to iloczyn skalarny, a $v \times u$ - wektorowy
- sprzężenie $\overline{\check{q}} = (a, -v, -a_\varepsilon, v_\varepsilon)$

Zdefiniujmy analogicznie do funkcji $R_q(x)$ fukcję $F_{\check{q}}(\check{x}) = \check{q}\check{x}\overline{\check{q}}$
Rotację R przedstawiamy indetycznie jak w pojedynczych kwaterionach czyli $\check{q}_R = (q, 0) = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\hat{v}, 0, 0)$
punkt x natomiast będzie reprezentował DQ $\check{x} = (1, 0, 0, x)$
Po odpowiednich przekształceniach można zauważyć, że jeśli $\check{q}$ jest rotacją, to funkcja $F_{\check{q}}(\check{x})$ jest torżsama z funkcją rotacji dla pojedynczych kwaterionów $R_q(x) = qxq^{-1}$

Translacje o wektor $T = (t_x, t_y, t_z)^T$ można zapisać jako $\check{q}_T = (1, 0, 0, \frac{T}{2})$ punkt x będzie reprezentowany jak na poprzednim slajdzie. Okazuje sie wtedy, że funkcja zdefiniowana na poprzednim slajdzie $F_{\check{q}}(\check{x}) = \check{q}\check{x}\overline{\check{q}}$ powoduje przesunięcie się punktu x o wektor T. Oraz przy założeniu, że $\check{q}$ reprezentuje tylko translację, funkcja $F_{\check{q}}(\check{x}) = \check{q}\check{x}\overline{\check{q}}$ jest równoważna z sumą wektorów x i T w $\mathbb{R}^3$

Przykład 2

Niech $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \check{x} = (1, 0, 0, x), \check{q} = (1, 0, 0, \frac{T}{2})$

$F_{\check{q}}(\check{x}) = (1, 0, 0, \frac{T}{2})(1, 0, 0, x)(1, 0, 0, \frac{T}{2}) =$

$(1, 0, 0, x + \frac{T}{2})(1, 0, 0, \frac{T}{2}) = (1, 0, 0, x + T) = (1, 0, 0, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$

Ponieważ argumentem oraz wynikim funkcji $F_{\check{q}}(\check{x}) = \check{q}\check{x}\overline{\check{q}}$ jest kwaterion dualny można składać te funkcje. Co więcej sprowadza się to wtedy do prostego mnożenia dwóch DQ przez siebie. W ten sposób w DQ można przechowywać np. kinematykę robota.

Zalety kwaternionów

- Mniejsze zapotrzebowanie pamięciowe w porównaniu do macierzy przekształceń.
- Mniejsza złożoność obliczeniowa przy składaniu przekształceń w porównaniu do macierzy.
- Łatwiejszy sposób liczenia odwrotności w porownaniu do macierzy.
- Mniej kosztowna normalizacja w porówaniu do macierzy.
- Brak zjawiska gimbal lock (utraty stopnia swobody) wystepującego np przy posługiwaniu się kątam eulera.
- Łatwa interpolacja między dwoma kwaterionami pozwalająca np. na animację obrotu (algorytm Slerp).

Wady i zastosowanie kwaternionów

Wady:

- Nie są intuicyjną dla człowieka formą reprezentacji danych.
- Większa złożoność obliczeniowa dla wyliczania przekształcenia wektora(punktu), niż w przypadku macierzy.

Zastosowanie:

- Grafika komputerowa (są zaimplementowane np. w DirectX, OpenGL)
- Określanie orientacji manipulatora w przestrzeni
- Wyliczanie przekształceń w $\mathbb{R}^3$.